

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n+1} > 1, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

$$\frac{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)}{2} \geq \frac{(a_1+x_1)(a_2+x_2)\dots(a_n+x_n)}{a_1a_2\dots a_n + x_1x_2\dots x_n}$$

INEGALITĂȚI MATEMATICE

provocări în utilizarea programei școlare

$$\sqrt{2 \cdot \sqrt{3 \cdot \dots \sqrt{n}}} < 3, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

$$3\sqrt{3}r \leq p \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}R$$

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 \leq x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Editura Cartea Vrânceană
ISBN 978-606-95212-2-9

2021

MIRELA PÎRVU

INEGALITĂȚI MATEMATICE
provocări în utilizarea programei școlare

2021

MIRELA PÎRVU

INEGALITĂȚI MATEMATICE: provocări în utilizarea programei școlare

ISBN 978-606-95212-2-9

EDITURA CARTEA VRÂNCEANĂ

Casa Corpului Didactic "Simion Mehedinți" Vrancea

Str. Eroilor, nr.2, Focșani, Vrancea

2021

Tehnoredactare și corectură: Mirela Pîrvu

Coperte: Corina Simionescu

© Mirela Pîrvu

Toate drepturile rezervate

PREFAȚĂ - Referat științific
asupra cărții intitulate INEGALITĂȚI MATEMATICE - provocări în utilizarea programei școlare
autor: prof. (gr. I) Mirela Pîrvu

Lucrarea elaborată de doamna profesoară Mirela Pîrvu își propune să ofere o bază de cunoștințe necesară familiarizării elevilor cu inegalitățile matematice. Cartea se adresează elevilor și profesorilor de matematică din învățământul gimnazial și liceal și urmărește programa școlară dar și programa olimpiadelor școlare, putând fi utilizată cu succes atât pentru pregătirea curentă a elevilor la clasă cât și în cadrul cercurilor de excelență.

Volumul este structurat în cinci capitole. Astfel, după un capitol introductiv intitulat „Prezența inegalităților în programele școlare”, următoarele patru capitole tratează fiecare câte un tip de inegalități: „Inegalități demonstrate prin inducție”, „Inegalități geometrice”, „Inegalități exponențiale și logaritmice” și „Inegalități cu numere complexe”. Modul de abordare este clar și natural, pornind de la o scurtă prezentare a principalelor noțiuni teoretice și continuându-se cu demonstrarea riguroasă a unor inegalități clasice dar și mai puțin cunoscute, între care se numără și probleme date la Olimpiada Internațională de Matematică.

Stilul de prezentare a lucrării este clar, atractiv și riguros, bazându-se pe noțiuni simple ușor de intuit. Întreaga lucrare poartă amprenta experienței didactice și profesionalismului autoarei și se adresează nu numai elevilor și profesorilor, dar și tuturor celor interesați de domeniul fascinant al inegalităților matematice.

În concluzie, pe baza acestor argumente, recomand cu căldură publicarea cărții elaborate de doamna profesoară Mirela Pîrvu considerând că este o lucrare de referință în domeniu, deosebit de utilă pentru pregătirea elevilor atât la nivel mediu cât și la nivelul olimpiadelor și concursurilor școlare.

2 aprilie 2021

Lector universitar dr. Marilena Jianu

Departamentul de Matematică și Informatică,

Universitatea Tehnică de Construcții București

ARGUMENT

Scopul lucrării de față este să facă mai ușoară trecerea de la litera manualului la cea a tratatului științific, să încurajeze elevii să abordeze inegalitățile cât mai inovativ.

Programa școlară este o parte a *Curriculumului național*, termen care derivă din limba latină și înseamnă *drum către*. Educația bazată pe curriculum are ca element central la toate etajele sale *activitatea de proiectare*.

Actualele programe școlare subliniază rolul reglator al achizițiilor elevilor în plan formativ. Acestea definesc în termeni generali informațiile necesare pentru formarea intelectuală, fără a mai preciza timpul (unic) necesar asimilării fiecărei unități de conținut. Rămâne la latitudinea fiecărui autor de manual *alternativ* și a profesorului să organizeze instruirea în funcție de obiectivele/competențele și conținuturile prevăzute în programele școlare și de propriile opțiuni privind progresul, abordarea metodică și interesele elevilor.

În condițiile noului curriculum, programa trebuie parcursă în mod necesar de toți, dar ea, ca și manualele, se pliază unei *citiri personale si adaptate*. Asupra conținuturilor programei profesorul poate să intervină prin regruparea lor sub temele unităților de învățare pe care le-a stabilit. Asupra unor unități sau

elemente de conținut din *manual* profesorul poate interveni în diferite moduri – adaptare, înlocuire, omitere, adăugare - sau poate utiliza alte materiale -suport .

Capitolul 1. Prezența inegalităților în programele școlare

Să urmărim acum modalitățile de familiarizare a elevilor de gimnaziu , dar și de liceu cu inegalitățile.

La sfârșitul gimnaziului elevul va fi capabil : să reprezinte numerele reale pe axa numerelor, folosind aproximări sau construcții geometrice, să compare numerele reale, să stabilească dacă un număr dat este sau nu soluție a unei inecuații, să scrie mulțimea soluțiilor unei inecuații de tipul $ax + b > 0$ ($<$, $\leq$, $\geq$) , unde $a, b \in R$.

Nu este precizat nicăieri în programa de gimnaziu că elevii trebuie să cunoască inegalitatea mediilor. Numai că e obligatoriu ca elevii să știe să calculeze media aritmetică, media aritmetică ponderată a două sau mai multe numere precum și media geometrică a două numere pozitive. Coroborând aceste noțiuni cu ceea ce elevii știu în legătură cu ordonarea numerelor, cât mai este până la vestita inegalitate?

Cu totul altfel stau lucrurile dacă ne referim la programa olimpiadei de matematică (etapa județeană sau națională). Încă din clasa a VII-a elevii trebuie să cunoască inegalități elementare, cum ar fi :

$$a^2 + b^2 \geq 2ab, \quad a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca, \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}, \text{ etc,}$$

să aplice inegalitatea mediilor, chiar în cazul general, să știe inegalitatea lui Cauchy-Buniakowski-Schwartz .

Pe de altă parte, la geometrie, elevii de gimnaziu se familiarizează practic cu inegalitățile triunghiului: nu pot construi un triunghi decât dacă fiecare latură este mai mică decât suma celorlalte două, prin măsurare directă află că într-un triunghi, la unghiul mai mare se opune latura mai mare și reciproc sau că în orice triunghi ABC are loc $h_a \leq l_a \leq m_a$.

Elevii din centrele de excelență au acces însă și la demonstrațiile inegalităților de mai sus, precum și la problemele de minim și de maxim din geometrie.

Cea mai largă paletă de inegalități: algebrice, geometrice și trigonometrice se studiază în clasele IX-X. Inegalitățile clasice cum ar fi inegalitatea mediilor, inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwartz, inegalitatea lui Minkovski, precum și inegalitatea lui Cebâșev, inegalitatea lui Bernoulli constituie puncte de plecare în deprinderea metodelor și tehnicilor de rezolvare a inegalităților întâlnite de

elevi la olimpiade și concursuri. Nu trebuie minimalizat rolul inducției matematice în rezolvarea multor inegalități, mai ales în trecerea acestora de la formele particulare la cele generale. Totodată mare parte din inegalitățile geometrice și cele trigonometrice se pot aduce în forme algebrice și reciproc cu ajutorul formulelor ce exprimă diverse elemente ale triunghiului în funcție de laturile sale :

$$p = \frac{a+b+c}{2} \text{ (semiperimetrul) ; } S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ (aria);}$$

$$R = \frac{abc}{4S} \text{ (raza cercului circumscris) ; } r = \frac{S}{p} \text{ (raza cercului înscris) ,}$$

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \text{ ; } \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \text{ , etc.}$$

Dacă în clasa a IX-a formele numerelor reale au fost cele de nivel gimnazial, ridicându-se ștacheta numai la modul de folosire al acestora, în clasa a X-a elevii fac cunoștință cu puterile cu exponenți reali, cu logaritmi, precum și cu mulțimea numerelor complexe a căror imagine geometrică nu se mai gasește pe o dreaptă ca în cazul numerelor reale, ci în planul complex la care ne raportăm prin intermediul unui sistem de două axe de coordonate.

În clasele XI-XII , calculul diferențial, respectiv integral face posibile aproximări foarte fine ale numerelor iraționale (cum ar fi $\pi, e, etc.$) prin numere raționale. Tot acum este posibilă studierea unor funcții din punct de vedere cantitativ și calitativ utilizând diverse procedee: majorări, minorări pe un interval dat, demonstrarea proprietăților algebrice și de ordine ale mulțimii numerelor reale în studiul calitativ local, aproximarea unor funcții cu ajutorul altor funcții mai simple, cunoscute. Studiul monotoniei și al convexității devine unul la îndemâna tuturor. Inegalitatea lui Young, inegalitatea lui Hölder, dar și inegalitățile lui Jensen pot fi demonstrate și utilizate de acum în cadrul cercurilor de elevi.

CAPITOLUL 2. Inegalități demonstrate prin inducție

Raționamentul inductiv este o metodă riscantă , dar frumoasă de a obține cunoștințe noi. Ne conduce pe baza unor situații particulare verificate la concluzii generale, care pot însă să nu fie adevărate. Prin corelare cu demonstrații , ce pot să probeze valabilitatea rezultatului obținut prin inducție, metoda capătă valoare și este numită inducție matematică.

Iată două variante ale inducției matematice:

Fie $n_0 \in \mathbb{N}$ și propoziția $P(n)$, $n \in \mathbb{N} , n \geq n_0$.

Varianta 1. Dacă

- i) $P(n_0)$ este adevărată,
 - ii) Implicația $P(n) \rightarrow P(n + 1)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N} , n \geq n_0$
- atunci $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N} , n \geq n_0$.

Varianta 2. Dacă

- i) $P(n_0)$ este adevărată,
 - ii) Implicația $P(n_0), \dots, P(n-1), P(n) \rightarrow P(n+1)$ este adevărată pentru orice $n \in N, n \geq n_0$
- atunci $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \in N, n \geq n_0$.

Avem câteva inegalități mai puțin clasice care se demonstrează cel mai nimerit cu metoda inducției matematice, fără să mai fie nevoie de nimic altceva.

1.

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n+1} > 1, \forall n \in N, n \geq 1.$$

Soluție. Fie $P(n): \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n+1} > 1, \forall n \in N, n \geq 1$.

Pentru $n = 1$ avem de verificat că $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1 \Leftrightarrow \frac{13}{12} > 1$ (adevărat).

Presupunem că $P(n)$ este adevărată și demonstrăm că $P(n + 1)$ este adevărată.

$$P(n + 1): \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+4} > 1$$

$$\text{Dar } \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+4} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+4} - \frac{1}{n+1}.$$

Din $P(n)$ adevărată știm că $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n+1} > 1$. Pentru a demonstra că $P(n + 1)$ este adevărată e suficient să arătăm că:

$$\frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+4} - \frac{1}{n+1} > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3(n+1)(3n+2)(3n+4)} > 0 \text{ (adevărat).}$$

Conform principiului inducției matematice, rezultă că $P(n)$ este adevărată, $\forall n \in N, n \geq 1$.

2.

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}, \forall n \in N, n \geq 1.$$

Soluție. Fie $P(n): \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$, $n \in N, n \geq 1$.

Pentru $n = 1$ avem de arătat că $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$, inegalitate care se verifică cu egal, ceea ce înseamnă că $P(1)$ este adevărată.

Presupunem că $P(n)$ este adevărată și demonstrăm că $P(n + 1)$ este adevărată.

$$P(n + 1): \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+4}}$$

Din $P(n)$ adevărată știm că:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2}.$$

Pentru a demonstra că $P(n + 1)$ este adevărată e suficient să arătăm că

$$\frac{1}{\sqrt{3n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+4}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3n+4}}{\sqrt{3n+1}} \leq \frac{2n+2}{2n+1} \Leftrightarrow \frac{3n+4}{3n+1} \leq \frac{4n^2+8n+4}{4n^2+4n+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12n^3 + 28n^2 + 19n + 4 \leq 12n^3 + 28n^2 + 20n + 4 \Leftrightarrow 0 \leq n \text{ (adevărat).}$$

Conform principiului inducției matematice, rezultă că $P(n)$ este adevărată, $\forall n \in N, n \geq 1$.

3. $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}} < 2$, unde numărul radicalilor este $n \in$

$N, n \geq 1$.

Soluție. Notăm $x_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}$, unde numărul radicalilor este

$n \in N, n \geq 1$.

Observăm că are loc relația de recurență $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$, $n \in N, n \geq 1$.

Fie $P(n)$: $x_n < 2$, $n \in N, n \geq 1$.

Pentru $n = 1$ avem de arătat că $x_1 = \sqrt{2} < 2$ (adevărat).

Presupunem că $P(n)$ este adevărată și demonstrăm că $P(n + 1)$ este adevărată.

Din $x_n < 2 \Rightarrow 2 + x_n < 4 \Rightarrow x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} < 2$, ceea ce trebuia demonstrat.

Conform principiului inducției matematice, rezultă că $P(n)$ este adevărată,
 $\forall n \in N, n \geq 1$

4.
$$\sqrt{2 \cdot \sqrt{3 \cdot \dots \cdot \sqrt{n}}} < 3, \forall n \in N, n \geq 2.$$

Soluție. Pentru $n \in N, n \geq 2$, fixat , notam $x_k = \sqrt{k \cdot \sqrt{(k+1) \cdot \dots \cdot \sqrt{n}}}$,

unde $k \leq n$.

Avem de arătat că $x_2 < 3$.

Demonstrăm că $x_k < k + 1$, $\forall k \in \{2, 3, \dots, n\}$, mergând inductiv înapoi.

Pentru $k = n$ avem de verificat că $\sqrt{n} < n + 1$ (adevărat).

Presupunem $k < n$ și $x_{k+1} < k + 2$ și demonstrăm că $x_k < k + 1$.

Într-adevăr $x_k = \sqrt{k \cdot x_{k+1}} < \sqrt{k(k+2)} < k + 1$, ceea ce trebuia demonstrat.

5.
$$(1 - a_1)(1 - a_2) \dots (1 - a_n) > 1 - a_1 - a_2 - \dots - a_n ,$$

$$\forall a_1, a_2, \dots, a_n \in (0; 1) , \quad n \in N, n \geq 2.$$

Soluție. Fie $P(n)$: $(1 - a_1)(1 - a_2) \dots (1 - a_n) > 1 - a_1 - a_2 - \dots - a_n$,

$$\forall a_1, a_2, \dots, a_n \in (0; 1) , n \in N, n \geq 2.$$

Pentru $n = 2$ avem de arătat că:

$$(1 - a_1)(1 - a_2) > 1 - a_1 - a_2 \Leftrightarrow a_1 a_2 > 0 \text{ (adevărat).}$$

Demonstrăm că $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$.

$$P(n + 1): (1 - a_1)(1 - a_2) \cdots (1 - a_{n+1}) > 1 - a_1 - a_2 - \cdots - a_{n+1} ,$$

$$\forall a_1, a_2, \dots, a_{n+1} \in (0; 1) .$$

Fie $a_1, a_2, \dots, a_{n+1} \in (0; 1)$.

Presupunem că $P(n)$ este adevărată , adică

$$(1 - a_1)(1 - a_2) \cdots (1 - a_n) > 1 - a_1 - a_2 - \cdots - a_n , \quad \text{înmulțim ambii}$$

membri ai inegalității cu $1 - a_{n+1} > 0$, obținem

$$\begin{aligned} (1 - a_1)(1 - a_2) \cdots (1 - a_{n+1}) &> (1 - a_1 - a_2 - \cdots - a_n)(1 - a_{n+1}) = \\ &= 1 - a_1 - a_2 - \cdots - a_n - a_{n+1} + a_{n+1}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \\ &> 1 - a_1 - a_2 - \cdots - a_{n+1}, \end{aligned}$$

deoarece $a_{n+1}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) > 0$ și astfel rezultă că $P(n + 1)$ este adevărată. Deci $P(n)$ este adevărată, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

6.

$$\frac{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}{2} \geq \frac{(a_1+x_1)(a_2+x_2)\cdots(a_n+x_n)}{a_1a_2\cdots a_n+x_1x_2\cdots x_n}$$

$\forall a_1, a_2, \dots, a_n, x_1, x_2, \dots, x_n \geq 1$ cu $x_k \geq a_k, k \in \{1, 2, \dots, n\}, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.

Soluție.

$$\text{Fie } P(n): \frac{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}{2} \geq \frac{(a_1+x_1)(a_2+x_2)\cdots(a_n+x_n)}{a_1a_2\cdots a_n+x_1x_2\cdots x_n}$$

$\forall a_1, a_2, \dots, a_n, x_1, x_2, \dots, x_n \geq 1$ cu $x_k \geq a_k, k \in \{1, 2, \dots, n\}, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.

Pentru $n = 1$ avem de arătat că $\frac{(1+a_1)}{2} \geq \frac{(a_1+x_1)}{a_1+x_1} \Leftrightarrow a_1 \geq 1$ (adevărat)

Demonstrăm că $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

$$P(n+1): \frac{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_{n+1})}{2} \geq \frac{(a_1+x_1)(a_2+x_2)\cdots(a_{n+1}+x_{n+1})}{a_1a_2\cdots a_{n+1}+x_1x_2\cdots x_{n+1}}$$

$\forall a_1, a_2, \dots, a_{n+1}, x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \geq 1$ cu $x_k \geq a_k, k \in \{1, 2, \dots, n+1\}$.

Fie $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}, x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \geq 1$ cu $x_k \geq a_k, k \in \{1, 2, \dots, n+1\}$.

Presupunem că $P(n)$ este adevărată, adică

$$\frac{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)}{2} \geq \frac{(a_1+x_1)(a_2+x_2)\dots(a_n+x_n)}{a_1 a_2 \dots a_n + x_1 x_2 \dots x_n}, \text{ înmulțim ambii membri ai}$$

inegalității cu $1 + a_{n+1} > 0$, obținem

$$\frac{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_{n+1})}{2} \geq \frac{(a_1+x_1)(a_2+x_2)\dots(a_n+x_n)(1+a_{n+1})}{a_1 a_2 \dots a_n + x_1 x_2 \dots x_n} \quad (1)$$

Este suficient să demonstrăm că

$$(2) \quad \frac{(a_1+x_1)(a_2+x_2)\dots(a_n+x_n)(1+a_{n+1})}{a_1 a_2 \dots a_n + x_1 x_2 \dots x_n} \geq \frac{(a_1+x_1)(a_2+x_2)\dots(a_n+x_n)(a_{n+1}+x_{n+1})}{a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1} + x_1 x_2 \dots x_n x_{n+1}}$$

Care este echivalentă, după împărțirea prin

$(a_1+x_1)(a_2+x_2)\dots(a_n+x_n) > 0$, cu inegalitatea

$$\frac{(1+a_{n+1})}{a_1 a_2 \dots a_n + x_1 x_2 \dots x_n} \geq \frac{(a_{n+1}+x_{n+1})}{a_1 a_2 \dots a_{n+1} + x_1 x_2 \dots x_{n+1}} \Leftrightarrow$$

$$a_{n+1}(a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1} + x_1 x_2 \cdots x_n x_{n+1}) \geq x_1 x_2 \cdots x_n a_{n+1} + a_1 a_2 \cdots a_n x_{n+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_1 a_2 \cdots a_n (a_{n+1}^2 - 1) + (x_{n+1} - 1)(x_1 x_2 \cdots x_n a_{n+1} - a_1 a_2 \cdots a_n) \geq 0$$

(adevărat).

Din (1) și (2), rezulta că $P(n+1)$ este adevărată.

Deci $P(n)$ este adevărată, $\forall n \in N, n \geq 1$.

$$7. \quad (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 \leq x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3,$$

$\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in N$ cu $x_1 < x_2 < \cdots < x_n, n \in N, n \geq 1$.

Soluție. Fie $P(n): (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 \leq x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3$,

$\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in N$ cu $x_1 < x_2 < \cdots < x_n, n \in N, n \geq 1$.

Pentru $n = 1$ avem de arătat că $x_1^2 \leq x_1^3, \forall x_1 \in N$ (adevărat).

Presupunem că $P(n)$ este adevărată și demonstrăm că $P(n+1)$ este adevărată.

$$P(n+1): (x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1})^2 \leq x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3 + x_{n+1}^3,$$

$\forall x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \in N$ cu $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+1}$.

Fie $x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \in N$ cu $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1}$.

Avem $(x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1})^2 =$

$$\begin{aligned} &= (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 + x_{n+1}^2 + 2x_{n+1}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \leq \\ &\leq x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 + x_{n+1}^2 + 2x_{n+1}(x_1 + x_2 + \dots + x_n), \end{aligned}$$

din $P(n)$ adevărată.

Este suficient să demonstrăm că $x_{n+1}^2 + 2x_{n+1}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \leq x_{n+1}^3$ (*).

$$\text{Cum } x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 1 + 2 + \dots + x_n = \frac{x_n(x_n-1)}{2} \leq \frac{x_{n+1}(x_{n+1}-1)}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \leq x_{n+1}^2 - x_{n+1}$, de unde prin înmulțire cu $x_{n+1} \in N$ obținem (*) și astfel $P(n+1)$ este adevărată.

Conform principiului inducției matematice, rezulta că $P(n)$ este adevărată, $\forall n \in N, n \geq 1$.

CAPITOLUL 3. Inegalități geometrice

Să începem cu inegalități pentru laturile $a, b, c > 0$ ale unui triunghi. În demonstrarea unor astfel de inegalități vom folosi mai mereu **inegalitatea triunghiului**, care apare în patru forme echivalente:

$$(i) \ a + b > c ; b + c > a ; c + a > b .$$

$$(ii) \ a > |b - c| ; b > |c - a| ; c > |a - b| .$$

$$(iii) \ (a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) > 0 .$$

$$(iv) \ \exists x, y, z > 0 \text{ astfel încât } a = y + z ; b = z + x ; c = x + y .$$

Demonstrație. Pentru $(i) \Leftrightarrow (ii)$ și $(i) \Leftrightarrow (iii)$ demonstrațiile sunt imediate.

$(i) \Rightarrow (iv)$ Dacă $p = \frac{a+b+c}{2}$ este semiperimetrul triunghiului cu laturile $a, b, c > 0$, atunci se verifică ușor că $a = 2p - (b + c)$, $b = 2p - (c + a)$ și

$$c = 2p - (a + b) .$$

Notăm $x = p - a > 0$, $y = p - b > 0$ și $z = p - c > 0 \Rightarrow$

$a = y + z ; b = z + x ; c = x + y$, ceea ce trebuia demonstrat.

$(iV) \Rightarrow (i)$ Din $a = y + z > 0$; $b = z + x > 0$; $c = x + y > 0$ rezultă că
 $a + b - c = 2z > 0$, $b + c - a = 2x > 0$ și $c + a - b = 2y > 0$.

Să trecem în revistă câteva formule importante de geometria triunghiului
și formele lor datorate lui (iV):

$$p = \frac{a+b+c}{2} = x + y + z \text{ (semiperimetrul)};$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{(x+y+z)xyz} \text{ (aria)};$$

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{(y+z)(z+x)(x+y)}{4\sqrt{(x+y+z)xyz}} \text{ (raza cercului circumscris)};$$

$$r = \frac{S}{p} = \sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}} \text{ (raza cercului înscris).}$$

Nu trebuie să uităm nici următoarele două teoreme:

Teorema sinusurilor. În orice triunghi ABC are loc

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R .$$

Teorema cosinusului. În orice triunghi ABC are loc

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad .$$

Aplicații

1. (A.Padoa) Dacă $a, b, c > 0$ sunt lungimile laturilor unui triunghi, atunci

$$abc \geq (a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) \quad .$$

Avem egalitate dacă și numai dacă triunghiul este echilateral, adică $a = b = c$.

Demonstrație. Cum $a, b, c > 0$ sunt lungimile laturilor unui triunghi, conform (iV),

$\exists x, y, z > 0$ astfel încât $a = y + z$; $b = z + x$; $c = x + y$ și inegalitatea devine

$$(y + z)(z + x)(x + y) \geq 8xyz, \text{ pentru } x, y, z > 0 \quad .$$

Dar, din inegalitatea mediilor, pentru $x, y, z > 0$ avem

$$\frac{y+z}{2} \geq \sqrt{yz}; \frac{z+x}{2} \geq \sqrt{zx}; \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \text{ și înmulțindu-le obținem ceea ce trebuia}$$

demonstrat.

Avem egalitate dacă și numai dacă $x = y = z \Leftrightarrow a = b = c$.

2. (Chapple 1746 , Euler 1765)

În orice triunghi ABC are loc $R \geq 2r$.

Avem egalitate dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Demonstrație.

Metoda I. Aplicăm inegalitatea lui A.Padoa.

$$R \geq 2r \Leftrightarrow \frac{abc}{4S} \geq \frac{2S}{p} \Leftrightarrow abc \geq \frac{8S^2}{p} \Leftrightarrow abc \geq 8(p-a)(p-b)(p-c) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) , \text{ adevărat.}$$

Metoda a II- a. Folosim următoarea identitate :

$$\begin{aligned} a(b^2 + c^2 - a^2) + b(c^2 + a^2 - b^2) + c(a^2 + b^2 - c^2) = \\ = 2abc + (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \end{aligned}$$

Din aceasta și teorema cosinusului, împărțind prin $2abc$, obținem

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R} .$$

Vom arata că $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$, ceea ce implică $R \geq 2r$.

Într-adevăr,

$$\begin{aligned}A + B + C = \pi &\Rightarrow \cos C = -\cos(A + B) = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \Rightarrow \\&\Rightarrow 3 - 2(\cos A + \cos B + \cos C) \\&= 3 - 2\cos A - 2\cos B + 2\cos A \cos B - 2\sin A \sin B = \\&= (\cos A + \cos B - 1)^2 + (\sin A - \sin B)^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Altfel, putem folosi identitatea de mai sus și inegalitatea lui A.Padoa pentru a obține

$$a(b^2 + c^2 - a^2) + b(c^2 + a^2 - b^2) + c(a^2 + b^2 - c^2) \leq 3abc, \quad \text{valabilă}$$

pentru laturile $a, b, c > 0$ ale unui triunghi.

Mai departe, împărțind prin $2abc$, rezultă ceea ce trebuia demonstrat.

Observatie. În cele de mai sus am ajuns la trei inegalități echivalente, prima geometrică, a doua algebrică și ultima trigonometrică:

$$\begin{aligned}R \geq 2r &\Leftrightarrow abc \geq (a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) \Leftrightarrow \\&\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

3. (Inegalitatea lui Mitrinovic)

În orice triunghi ABC are loc $3\sqrt{3}r \leq p \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}R$.

Avem egalități dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Demonstrație. Prin ridicare la pătrat, prima inegalitate devine

$$27r^2 \leq p^2 \Leftrightarrow \frac{27S^2}{p^2} \leq p^2 \Leftrightarrow 27(p-a)(p-b)(p-c) \leq p^3 \quad (*)$$

Din inegalitatea mediilor, avem

$$\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)} \leq \frac{(p-a) + (p-b) + (p-c)}{3} = \frac{p}{3},$$

de unde, prin ridicare la cub , obținem (*) și prima inegalitate este astfel demonstrată.

Pentru a demonstra a doua inegalitate aplicăm teorema sinusurilor .

$$\begin{aligned} p \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}R &\Leftrightarrow \frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \leq \sin\left(\frac{A+B+C}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Ultima inegalitate este adevărată, fiind justificată de concavitatea funcției $\sin$ pe intervalul $(0; \pi)$.

Observăm că din inegalitatea lui Mitrinovic $\left(3\sqrt{3}r \leq p \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}R\right)$ rezultă inegalitatea lui Euler ($R \geq 2r$).

Iată acum o inegalitate între ceviene remarcabile într-un triunghi din care putem obține din nou inegalitatea lui Euler.

4. (L.Panaitopol, Gazeta Matematică, 1983)

În orice triunghi ABC are loc

$$(P) \quad l_a - h_a \leq R - 2r, \quad ,$$

unde l_a și h_a sunt lungimile bisectoarei și înălțimii din A , iar R și r sunt razele cercurilor circumscris și înscris.

Soluție. Fiind o inegalitate “liniară”, este grea și trebuie să fi dat multa bătaie de cap rezolvitorilor Gazetei Matematice de atunci (cu siguranța și celor de acum). Ca în multe alte situații, întărirea inegalității poate să sugereze o cale de atac mai comodă.

Cum $l_a \leq \sqrt{p(p-a)}$ (majorare de “clasa”) , ne propunem să studiem valabilitatea inegalității întărite

$$(P') \quad \sqrt{p(p-a)} - h_a \leq R - 2r .$$

$$\begin{aligned} \text{Avem } \sqrt{p(p-a)} - h_a &= \sqrt{bc} \cos \frac{A}{2} - \frac{bc}{2R} \leq \left(R \cos^2 \frac{A}{2} + \frac{bc}{4R} \right) - \frac{bc}{2R} = \\ &= R \left(\sin^2 \frac{B+C}{2} - \sin B \sin C \right) = R \sin^2 \frac{B-C}{2} . \end{aligned}$$

Am demonstrat că are loc

$$(P'') \quad \sqrt{p(p-a)} - h_a \leq R \sin^2 \frac{B-C}{2} ,$$

$$\text{cu egalitate doar dacă } R \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{bc}{4R} \Leftrightarrow \cos(B-C) = 1 \Leftrightarrow B = C$$

(triunghiul ABC este isoscel de bază $[BC]$).

Încheiem metoda intercalării demonstrând inegalitatea

$$(P''') \quad R \sin^2 \frac{B-C}{2} \leq R - 2r .$$

Dacă O și I sunt centrele cercurilor circumscris și înscris, iar T este proiecția lui O pe bisectoarea interioară a unghiului BAC , inegalitatea de mai sus este echivalentă cu $OT^2 \leq OI^2$, adică

$$OT \leq OI \text{ (adevărat).}$$

Avem egalitate în (P''') dacă $2a = b + c$.

Următoarea inegalitate a fost propusă de Klamkin și a fost atribuită inițial lui E.Catalan.

5. (OIM 1983)

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0,$$

$\forall a, b, c > 0$ lungimile laturilor unui triunghi.

Soluție. Cum $a, b, c > 0$ sunt lungimile laturilor unui triunghi, conform (iV),

$\exists x, y, z > 0$ astfel încât $a = y + z$; $b = z + x$; $c = x + y$ și inegalitatea de demonstrat devine

$$x^3z + y^3x + z^3y \geq x^2yz + xy^2z + xyz^2, \text{ pentru } x, y, z > 0.$$

Împărțim prin $xyz > 0$ și obținem

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geq x + y + z \Leftrightarrow (x + y + z) \left(\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \right) \geq (x + y + z)^2 \quad (*).$$

Ultima inegalitate este justificată de CBS :

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2, \forall a_i, b_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, 2, 3\},$$

Cu substituțiile $\sqrt{x} = a_1, \sqrt{y} = a_2, \sqrt{z} = a_3, \frac{z}{\sqrt{x}} = b_1, \frac{x}{\sqrt{y}} = b_2, \frac{y}{\sqrt{z}} = b_3$ și

$$a_1b_1 = z, a_2b_2 = x, a_3b_3 = y.$$

6. (Inegalitatea lui Weitzenböck)

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S,$$

$\forall a, b, c > 0$ lungimile laturilor unui triunghi cu aria S .

Soluție. Cum $a, b, c > 0$ sunt lungimile laturilor unui triunghi, conform (iV),

$\exists x, y, z > 0$ astfel încât $a = y + z; b = z + x; c = x + y$ și inegalitatea de demonstrat devine

$$(y + z)^2 + (z + x)^2 + (x + y)^2 \geq 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{(x + y + z)xyz} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [(y+z)^2 + (z+x)^2 + (x+y)^2]^2 \geq 48xyz(x+y+z)$$

Aplicăm succesiv inegalitatea mediilor și inegalitatea

$$(\alpha + \beta + \gamma)^2 \geq 3(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \text{ , } \forall \alpha, \beta, \gamma \in R:$$

$$\begin{aligned} [(y+z)^2 + (z+x)^2 + (x+y)^2]^2 &\geq 16(yz + zx + xy)^2 \\ &\geq 16 \cdot 3(yz \cdot zx + zx \cdot xy + xy \cdot yz) = \\ &= 48xyz(x+y+z). \end{aligned}$$

O inegalitate mai fină decât cea de mai sus dar care se demonstrează la fel de ușor este inegalitatea Hadwiger-Finsler:

$$7. \quad a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \text{ ,}$$

$\forall a, b, c > 0$ lungimile laturilor unui triunghi cu aria S .

8. (G.Polya și G.Szego)

$$abc \geq \left(\frac{4S}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{3}{2}} \text{ , } \forall a, b, c > 0 \text{ lungimile laturilor unui triunghi cu aria } S \text{ .}$$

Soluție. Inegalitatea de demonstrat se scrie , echivalent

$$3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \geq 4\sqrt{3}S .$$

Folosim inegalitatea Hadwiger-Finsler

$$2(ab + bc + ca) - (a^2 + b^2 + c^2) \geq 4\sqrt{3}S$$

și rămâne să demonstrăm că are loc

$$3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \geq 2(ab + bc + ca) - (a^2 + b^2 + c^2) \quad (*) .$$

Aplicăm inegalitatea **Schur**

$$x^r(x - y)(x - z) + y^r(y - x)(y - z) + z^r(z - x)(z - y) \geq 0 ,$$

$$\forall x, y, z \geq 0 , r > 0 .$$

Pentru $r = 1$ are loc:

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq xy(x + y) + yz(y + z) + zx(z + x) , \forall x, y, z \geq 0 .$$

Pentru $x, y, z \geq 0$, din inegalitatea mediilor, avem $x + y \geq 2\sqrt{xy}$, ... ceea ce demonstrează că :

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq 2(xy\sqrt{xy} + yz\sqrt{yz} + zx\sqrt{zx}) \quad (**) .$$

În $(**)$ luăm $x = \sqrt[3]{a^2}$, $y = \sqrt[3]{b^2}$, $z = \sqrt[3]{c^2}$ și obținem $(*)$

$$9. \quad \frac{a}{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}} + \frac{b}{\sqrt{2c^2+2a^2-b^2}} + \frac{c}{\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}} \geq \sqrt{3} ,$$

$\forall a, b, c > 0$ lungimile laturilor unui triunghi.

Soluția I. Cum $a, b, c > 0$ sunt lungimile laturilor unui triunghi , conform (iV),

$\exists x, y, z > 0$ astfel încât $a = y + z$; $b = z + x$; $c = x + y$ și inegalitatea

de demonstrat devine

$$\sum_{cyc} \frac{y+z}{\sqrt{2(z+x)^2+2(x+y)^2-(y+z)^2}} \geq \sqrt{3} ,$$

imposibil de demonstrat elementar.

Soluția a II-a. (Darij Grinberg)

Dacă $a, b, c > 0$ sunt lungimile laturilor unui triunghi ABC , ale cărei mediane

sunt

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2} , \dots$$

inegalitatea de demonstrat devine

$$\frac{a}{m_a} + \frac{b}{m_b} + \frac{c}{m_c} \geq 2\sqrt{3} .$$

Considerăm un nou triunghi MNP cu laturile m_a, m_b, m_c . În acest triunghi medianele au lungimile $\frac{3a}{4}, \frac{3b}{4}$ și $\frac{3c}{4}$.

Inegalitatea din enunț se scrie pentru triunghiul MNP astfel

$$\frac{\frac{4}{3}m_a}{a} + \frac{\frac{4}{3}m_b}{b} + \frac{\frac{4}{3}m_c}{c} \geq 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{\frac{2}{3}m_a}{a} + \frac{\frac{2}{3}m_b}{b} + \frac{\frac{2}{3}m_c}{c} \geq \sqrt{3} .$$

Revenim în triunghiul inițial ABC cu G centrul de greutate . Avem

$$GA = \frac{2}{3}m_a , GB = \frac{2}{3}m_b , GC = \frac{2}{3}m_c$$

și următoarea inegalitate de demonstrat

$$\frac{GA}{a} + \frac{GB}{b} + \frac{GC}{c} \geq \sqrt{3} .$$

Ultima inegalitate se verifică într-un cadru mult mai larg:

$$\frac{MA}{a} + \frac{MB}{b} + \frac{MC}{c} \geq \sqrt{3} \quad , \forall M \in \text{Int}[ABC] \quad .$$

10. (OIM 1991)

Dacă într-un triunghi ABC , bisectoarele AD, BE, CF se intersectează într-un punct I , atunci

$$\frac{IA}{AD} \cdot \frac{IB}{BE} \cdot \frac{IC}{CF} \leq \frac{8}{27} \quad .$$

Soluție.

Folosim teorema bisectoarei.

Bisectoarea unui triunghi împarte latura opusă într-un raport egal cu raportul celorlalte două laturi.

Notăm $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ și $DB = x$, $DC = y$.

Din $[AD]$ bisectoare în triunghiul ABC avem $\frac{x}{y} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{x+y}{y} = \frac{b+c}{b}$ și cum

$$x + y = a \Rightarrow y = \frac{ab}{b+c} \quad .$$

Din $[CI]$ bisectoare în triunghiul ADC avem $\frac{IA}{ID} = \frac{b}{y} \Rightarrow \frac{IA}{IA+ID} = \frac{b}{b+y}$ și cum

$$IA + ID = AD \Rightarrow \frac{IA}{AD} = \frac{b+c}{a+b+c}.$$

Analog, se obțin $\frac{IB}{BE} = \frac{c+a}{a+b+c}$ și $\frac{IC}{CF} = \frac{a+b}{a+b+c}.$

Avem de demonstrat că $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3} \leq \frac{8}{27}.$

Aplicăm inegalitatea mediilor :

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)} &\leq \frac{(a+b) + (b+c) + (c+a)}{3} = \frac{2(a+b+c)}{3} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}}{(a+b+c)} \leq \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

de unde , ridicând la cub, obținem ceea ce trebuia demonstrat.

CAPITOLUL 4. Inegalități exponențiale și logaritmice

Pentru început vom aborda inegalitățile “elementare” în care apar funcții exponențiale sau logaritmice. Ne vom feri să apelăm la noțiuni de analiză matematică, care nu sunt la îndemâna elevilor de clasa a X-a. Avem la îndemână regulile de ordonare:

(i) pentru $a > 1$ (**bază supraunitară**)

$$a^x < a^y, \forall x, y \in R \text{ cu } x < y ;$$

$$\log_a x < \log_a y, \forall x, y > 0 \text{ cu } x < y .$$

(ii) pentru $0 < a < 1$ (**bază subunitară**)

$$a^x > a^y, \forall x, y \in R \text{ cu } x < y ;$$

$$\log_a x > \log_a y, \forall x, y > 0 \text{ cu } x < y .$$

Aplicații

1. $2^{x^2} + 2^{y^2} + 2^{z^2} \geq 2^{xy} + 2^{yz} + 2^{zx}$, $\forall x, y, z \in R$.

Soluție. Fie $x, y, z \in R$. Aplicăm inegalitatea mediilor de două ori :

$$2^{x^2} + 2^{y^2} \geq 2\sqrt{2^{x^2} \cdot 2^{y^2}} = 2\sqrt{2^{x^2+y^2}} \geq 2\sqrt{2^{2xy}} = 2 \cdot 2^{xy} ; \dots$$

Adunând inegalitățile de mai sus obținem ceea ce trebuia demonstrat.

2. Dacă $a, b, c > 1$ cu $\frac{a}{b} \geq \frac{c}{a}$, atunci $\frac{\lg a}{\lg b} \geq \frac{\lg c}{\lg a}$.

Soluție. Fie $a, b, c > 1$ cu $\frac{a}{b} \geq \frac{c}{a} \Rightarrow a^2 \geq bc \Rightarrow \lg a^2 \geq \lg(bc) \Rightarrow$

$$2 \lg a \geq \lg b + \lg c .$$

Cum $b, c > 1 \Rightarrow \lg b, \lg c > 0$. Din inegalitatea mediilor avem

$$\lg b + \lg c \geq 2\sqrt{\lg b \cdot \lg c} .$$

Se obține $\lg a \geq \sqrt{\lg b \cdot \lg c}$, care prin ridicare la pătrat devine

$$\lg^2 a \geq \lg b \cdot \lg c , \text{ adică } \frac{\lg a}{\lg b} \geq \frac{\lg c}{\lg a} .$$

3. Dacă $a, b, c > 1$ cu $a < b$, atunci $\log_a b > \log_{ac} bc$.

Soluție . Fie $a, b, c > 1$ cu $a < b$.

$$\log_a b > \log_{ac} bc \Leftrightarrow \log_a b > \frac{\log_a bc}{\log_a ac} = \frac{\log_a b + \log_a c}{1 + \log_a c} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_a b + \log_a b \cdot \log_a c > \log_a b + \log_a c \Leftrightarrow \log_a c \cdot (\log_a b - 1) > 0 .$$

Ultima inegalitate este adevărată deoarece

$$a, c > 1 \Rightarrow \log_a c > 0 \text{ și } a < b \Rightarrow \log_a b > 1 .$$

4. Dacă $a, b > 1$ cu $a < b$ si $c > 0$, atunci $\log_a b > \log_{a+c}(b+c)$.

Soluție. Fie $a, b > 1$ cu $a < b$, $c > 0 \Rightarrow \frac{b}{a} > \frac{b+c}{a+c} > 1 \Rightarrow$

$$\log_a \frac{b}{a} > \log_a \frac{b+c}{a+c} = \frac{1}{\log_{\frac{b+c}{a+c}} a} > \frac{1}{\log_{\frac{b+c}{a+c}}(a+c)} = \log_{a+c} \frac{b+c}{a+c} \Rightarrow$$

$$\log_a b - 1 > \log_{a+c}(b+c) - 1 , \text{ adică } \log_a b > \log_{a+c}(b+c) .$$

5. Dacă $a, b \in (0; 1)$, atunci au loc inegalitățile:

$$(*) \log_a \frac{2ab}{a+b} + \log_b \frac{2ab}{a+b} \geq 2 ,$$

$$(**) \log_a \frac{2ab}{a+b} \cdot \log_b \frac{2ab}{a+b} \geq 1 .$$

Soluție. Fie $a, b \in (0; 1)$. Aplicăm inegalitatea dintre media armonică și media geometrică a numerelor a, b și ținem cont că bazele a și b ale logaritmilor sunt subunitare.

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \Rightarrow \log_a \frac{2ab}{a+b} \geq \log_a \sqrt{ab} = \frac{1}{2}(1 + \log_a b) ;$$

$$\log_b \frac{2ab}{a+b} \geq \log_b \sqrt{ab} = \frac{1}{2}(1 + \log_b a) \text{ (■)} .$$

Pentru a demonstra (*) adunăm inegalitățile (■):

$$\log_a \frac{2ab}{a+b} + \log_b \frac{2ab}{a+b} \geq \frac{1}{2}(2 + \log_a b + \log_b a) = \frac{1}{2}\left(2 + \log_a b + \frac{1}{\log_a b}\right) \geq 2 .$$

Pentru a justifica ultima inegalitate luăm $x = \log_a b > \log_a 1 = 0$ și folosim că

$$x + \frac{1}{x} \geq 2, \forall x > 0.$$

Pentru a demonstra (**) înmulțim inegalitățile (■):

$$\begin{aligned} \log_a \frac{2ab}{a+b} \cdot \log_b \frac{2ab}{a+b} &\geq \frac{1}{4} (1 + \log_a b + \log_b a + \log_a b \cdot \log_b a) = \\ &= \frac{1}{4} \left(2 + \log_a b + \frac{1}{\log_a b} \right) \geq 1. \end{aligned}$$

6. Dacă $a, b, c > 1$, atunci au loc inegalitățile :

$$(\sim) \log_a \frac{b+c}{2} + \log_b \frac{c+a}{2} + \log_c \frac{a+b}{2} \geq 3 ;$$

$$(\approx) \log_{bc} a + \log_{ca} b + \log_{ab} c \geq \frac{3}{2} .$$

Soluție. Fie $a, b, c > 1$.

Notăm $\lg a = x > 0$, $\lg b = y > 0$, $\lg c = z > 0$.

Inegalitatea ($\sim$) se obține direct din inegalitatea mediilor $\frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc}$, ...și

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2, \dots.$$

Inegalitatea ($\approx$) se scrie

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}, \quad \text{pentru } x, y, z > 0.$$

Inegalitatea de mai sus este inegalitatea lui Nesbitt.

Deoarece variabilele sunt din N , putem utiliza inducția matematică în demonstrarea inegalităților:

7. $2^n \geq n^2, \forall n \in N, n \geq 4.$

8. $n \geq \lg(n^3 + 9), \forall n \in N, n \geq 1.$

CAPITOLUL 5. Inegalități cu numere complexe

1. (Inegalitatea triunghiului)

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Generalizare.

$$|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|, \forall z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C},$$
$$n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Demonstrație. Pentru $n = 2$, ridicăm la pătrat și folosim proprietatea $z \cdot \bar{z} = |z|^2, \forall z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| &\Leftrightarrow |z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1| \cdot |z_2| \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1 \leq 2|z_1 z_2|. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cum } \overline{z_1 z_2} &= \bar{z}_1 \bar{z}_2 \Rightarrow z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1 \in \mathbb{R} \text{ si } z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1 = \\ &= 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \leq 2|z_1 \bar{z}_2| = 2|z_1 z_2|, \end{aligned}$$

rezultă că propoziția este adevărată pentru $n = 2$.

Cazul de egalitate are loc dacă $Re(z_1 \bar{z}_2) = |z_1 \bar{z}_2|$, adică $z_1 \bar{z}_2 \in R$ cu $z_1 \bar{z}_2 \geq 0$.

Interpretare geometrică. Fie M_1, M_2 punctele din plan care au afixele z_1 , respectiv z_2 și O originea sistemului de axe de coordonate, iar M punctul de afix $z_1 + z_2$.

În triunghiul M_1OM , eventual degenerat, avem

$$OM = |z_1 + z_2|, OM_1 = |z_1| \text{ și } MM_1 = |z_2|.$$

Din $OM \leq OM_1 + MM_1$ obținem $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Acum trecem de la n la $n + 1$.

Presupunem că are loc

$$|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|, \quad ,$$

$$\forall z_1, z_2, \dots, z_n \in C$$

și trebuie să demonstrăm că este îndeplinită inegalitatea

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n + z_{n+1}| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| + |z_{n+1}|, \forall z_1, z_2, \cdots, z_n, z_{n+1} \in \mathbb{C}.$$

Notăm $z_1 + z_2 + \cdots + z_n = z$.

Avem $|z + z_{n+1}| \leq |z| + |z_{n+1}|$, la care adăugăm

$$|z| = |z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$$

ceea ce demonstrează că propoziția este adevărată pentru $n + 1$ numere.

Consecință. $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$

$$\begin{aligned} \text{Într-adevăr, } |z_1| &= |z_1 + z_2 + (-z_2)| \leq |z_1 + z_2| + |-z_2| = \\ &= |z_1 + z_2| + |z_2| \Rightarrow |z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|. \end{aligned}$$

$$2. \quad (\blacksquare) |z_1 + 1| + |z_2 + 1| + |z_1 z_2 + 1| \geq 2,$$

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \text{ cu } |z_1| = |z_2| = 1.$$

Soluție. Fie $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ cu $|z_1| = |z_2| = 1$.

Aplicăm consecința de mai sus și obținem

$$\begin{aligned} & |z_1 + 1| + |z_2 + 1| + |z_1 z_2 + 1| \geq \\ & \geq |z_1 + 1| + |(z_1 z_2 + 1) - (z_2 + 1)| = \\ & = |z_1 + 1| + |z_2||z_1 - 1| = \\ & = |z_1 + 1| + |z_1 - 1| \geq |z_1 + 1 + z_1 - 1| = 2|z_1| = 2. \end{aligned}$$

Observația 1. Dacă $z_1 = z_2 = z$ cu $|z| = 1$,

atunci inegalitatea (■) devine

$$2|z + 1| + |z^2 + 1| \geq 2.$$

Generalizare (M. Bencze, Gazeta Matematică 1998)

$$\begin{aligned} & n|1 + z| + |1 + z^2| + |1 + z^3| + |1 + z^4| + \dots + |1 + z^{2n}| + \\ & + |1 + z^{2n+1}| \geq 2n, \end{aligned}$$

$\forall z \in \mathbb{C}$ cu $|z| = 1$ si $\forall n \in \mathbb{N}$ cu $n \geq 1$.

Observația 2. Dacă $z_1 = z$, $z_2 = z^2$ cu $|z| = 1$, atunci inegalitatea (■) devine

$$|1 + z| + |1 + z^2| + |1 + z^3| \geq 2.$$

Interpretare geometrică:

Dacă dintr-un punct B al unui cerc de rază unu se construiesc trei arce congruente A_1 , A_1A_2 și A_2A_3 , iar A este punctul diametral opus lui B , atunci suma vectorilor AA_1 , AA_2 și AA_3 este mai mare decât diametrul cercului.

3. (Inegalitatea lui Hlawka)

$$\begin{aligned} & |z_1 + z_2| + |z_2 + z_3| + |z_3 + z_1| \leq \\ & \leq |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_1 + z_2 + z_3|, \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Soluție. Ridicăm la pătrat ambii membri ai inegalității și folosim identitatea

$$\begin{aligned} (*) \quad & |z_1 + z_2|^2 + |z_2 + z_3|^2 + |z_3 + z_1|^2 = \\ & = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_1 + z_2 + z_3|^2, \end{aligned}$$

care rezultă direct din proprietatea $z \cdot \bar{z} = |z|^2$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

Pe de altă parte,

$$\begin{aligned} 2|z_1+z_2| \cdot |z_2+z_3| &= 2|z_2(z_1+z_2+z_3) + z_1z_3| \leq \\ &\leq 2|z_2||z_1+z_2+z_3| + |z_1z_3|, \dots \end{aligned}$$

Adunând inegalitățile de mai sus cu egalitatea (*), se obține

$$(|z_1+z_2| + |z_2+z_3| + |z_3+z_1|)^2 \leq (|z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_1+z_2+z_3|)^2,$$

din care rezultă inegalitatea lui Hlawka .

4. Dacă $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}^*$ cu $|z_1| = |z_2| = \dots = |z_n| = r$, atunci

$$(z_1+z_2+\dots+z_n) \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \dots + \frac{1}{z_n} \right) \in [0; n^2], \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Demonstrație. Notăm $\omega = (z_1+z_2+\dots+z_n) \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \dots + \frac{1}{z_n} \right)$.

Aplicând proprietatea $z \cdot \bar{z} = |z|^2$, $\forall z \in \mathbb{C}$,

rezultă că

$$\bar{\omega} = (\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \dots + \bar{z}_n) \left(\frac{1}{\bar{z}_1} + \frac{1}{\bar{z}_2} + \dots + \frac{1}{\bar{z}_n} \right) =$$

$$= r^2 \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \dots + \frac{1}{z_n} \right) \cdot \frac{1}{r^2} (z_1 + z_2 + \dots + z_n) = \omega \Rightarrow \omega \in \mathbb{R}.$$

Mai departe, utilizăm forma trigonometrică a numerelor $z_k, k = \overline{1, n}$.

Dacă $z_k = r(\cos \varphi_k + i \sin \varphi_k), k = \overline{1, n}$,

atunci

$$\begin{aligned} \omega &= \left[\left(\sum_{k=1}^n \cos \varphi_k \right) + i \left(\sum_{k=1}^n \sin \varphi_k \right) \right] \cdot \left[\left(\sum_{k=1}^n \cos \varphi_k \right) - i \left(\sum_{k=1}^n \sin \varphi_k \right) \right] = \\ &= \left(\sum_{k=1}^n \cos \varphi_k \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n \sin \varphi_k \right)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Pe de altă parte,

$$\begin{aligned} \omega &= n + 2 \sum_{1 \leq k < l \leq n} (\cos \varphi_k \cos \varphi_l + \sin \varphi_k \sin \varphi_l) = n + 2 \sum_{1 \leq k < l \leq n} \cos(\varphi_k - \varphi_l) \leq \\ &\leq n + 2(n-1 + n-2 + \dots + 1) = n + n(n-1) = n^2. \end{aligned}$$

Deci, $0 \leq \omega \leq n^2$.

5. (Inegalitatea lui H. Bohr)

Dacă $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ și $c > 0$, atunci are loc

$$(*) \quad |z_1 + z_2|^2 \leq (1 + c)|z_1|^2 + \left(1 + \frac{1}{c}\right)|z_2|^2, \quad ,$$

cu egalitate dacă și numai dacă $z_2 = cz_1$.

Generalizare.(J.W. Archbold)

Dacă $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ și $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ astfel încât

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} = 1, \text{ atunci}$$

$$(**) \quad |z_1 + z_2 + \dots + z_n|^2 \leq a_1|z_1|^2 + a_2|z_2|^2 + \dots + a_n|z_n|^2.$$

Demonstrație. Pentru $a_k > 0, b_k \in \mathbb{R}, k = \overline{1, n}$, cu

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} = 1, \text{ avem, conform CBS,}$$

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k^2 = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \right) \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k^2 \right) \geq \left(\sum_{k=1}^n b_k \right)^2.$$

Luând $b_k = \frac{|z_k|}{\sum_{k=1}^n |z_k|}$, pentru $k = \overline{1, n}$, avem

$$(***) \sum_{k=1}^n a_k |z_k|^2 - \left(\sum_{k=1}^n |z_k| \right)^2 \geq 0 .$$

Din $\sum_{k=1}^n |z_k| \geq |\sum_{k=1}^n z_k|$ și $(***)$, obținem $(**)$.

În [3] , Mitrinovic amintește că A. Makowski a demonstrat un caz particular
(când $z_1, z_2 \in R$) al inegalității $(*)$:

$$\begin{aligned} (a-b)^2 \sin \alpha + (a+b)^2 \cos \alpha &\leq (1+c|\cos 2\alpha|)a^2 + \left(1 + \frac{|\cos 2\alpha|}{c}\right)b^2 \\ &\leq (1+c)a^2 + \left(1 + \frac{1}{c}\right)b^2 , \quad \forall a, b, \alpha \in R \text{ și } c > 0 . \end{aligned}$$

6. Dacă $z_1, z_2 \in C$ și $u, v \in R^*$ cu $u + v \neq 0$,
atunci:

$$\begin{aligned} (\sim) \quad \frac{|z_1+z_2|^2}{u+v} &\leq \frac{|z_1|^2}{u} + \frac{|z_2|^2}{v} , \quad \text{pentru } \frac{1}{u} + \frac{1}{v} > 0 ; \\ (\approx) \quad \frac{|z_1+z_2|^2}{u+v} &\geq \frac{|z_1|^2}{u} + \frac{|z_2|^2}{v} , \quad \text{pentru } \frac{1}{u} + \frac{1}{v} < 0 . \end{aligned}$$

Egalitățile au loc dacă și numai dacă $vz_1 = uz_2$.

Soluție. Folosim identitatea

$$\frac{|z_1|^2}{u} + \frac{|z_2|^2}{v} - \frac{|z_1+z_2|^2}{u+v} = \frac{|vz_1 - uz_2|^2}{uv(u+v)}.$$

7. (Mitrinovic)

Dacă $z_1, z_2, \dots, z_n, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C}, n \geq 2$ și $\varepsilon > 0$, atunci

$$\sum_{k=1}^n |z_k - a_k| < \varepsilon \Rightarrow \left| \prod_{k=1}^n z_k - \prod_{k=1}^n a_k \right| \leq \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} S_k \varepsilon^{n-1-k},$$

unde S_k este a k -a funcție simetrică de $|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|$.

Demonstrație. Folosim metoda inducției matematice.

Pentru $n = 2$. Dacă $|z_1 - a_1| + |z_2 - a_2| < \varepsilon$, atunci

$$\begin{aligned} |z_1 z_2 - a_1 a_2| &= |(z_1 - a_1)(z_2 - a_2) + a_1(z_2 - a_2) + a_2(z_1 - a_1)| \leq \\ &\leq |z_1 - a_1||z_2 - a_2| + |a_1||z_2 - a_2| + |a_2||z_1 - a_1| < \varepsilon(\varepsilon + |a_1| + |a_2|). \end{aligned}$$

Deci, $|z_1 - a_1| + |z_2 - a_2| < \varepsilon \Rightarrow$

$$|z_1 z_2 - a_1 a_2| < \varepsilon(\varepsilon + |a_1| + |a_2|) .$$

Presupunem afirmația adevărată pentru $n \geq 2$ și arătăm că este adevărată și pentru $n + 1$.

Presupunem că $\sum_{k=1}^{n+1} |z_k - a_k| < \varepsilon$.

Folosim identitatea

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n+1} z_k - \prod_{k=1}^{n+1} a_k &= \left(\prod_{k=1}^n z_k - \prod_{k=1}^n a_k \right) [(z_{n+1} - a_{n+1}) + a_{n+1}] + \\ &+ \left(\prod_{k=1}^n a_k \right) (z_{n+1} - a_{n+1}) . \end{aligned}$$

Obținem

$$\begin{aligned} \left| \prod_{k=1}^{n+1} z_k - \prod_{k=1}^{n+1} a_k \right| &\leq (\varepsilon + |a_{n+1}|) \sum_{k=0}^{n-1} S_k \varepsilon^{n-k} + \varepsilon |a_{n+1}| S_n = \\ &= \varepsilon^{n+1} + \sum_{k=1}^n (S_k + |a_{n+1}| S_{k-1}) \varepsilon^{n-k} = \varepsilon \sum_{k=0}^n S_k^* \varepsilon^{n-k} , \end{aligned}$$

unde S_k^* este o k -a funcție simetrică de $|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|, |a_{n+1}|$.

Iată acum o inegalitate interesantă, pe care o demonstrăm folosind forma geometrică a numerelor complexe.

8. (L.Panaitopol, Gazeta Matematică, 1981)

Să se arate că în orice triunghi ABC avem

$$\frac{R}{2r} \geq \frac{m_a}{h_a},$$

egalitatea având loc numai în cazul triunghiului echilateral.

Soluție. Știind că $S = pr$, $S = \frac{abc}{4R}$ și $S = \frac{ah_a}{2}$, inegalitatea devine

$$2rm_a \leq Rh_a \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{S}{p} \cdot m_a \leq R \cdot \frac{2S}{a} \Leftrightarrow am_a \leq Rp.$$

Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ afixele vârfurilor A, B, C , într-un sistem de axe de coordonate cu originea în centrul cercului circumscris triunghiului ABC .

Atunci:

$$\begin{aligned} 2am_a &= 2|z_2 - z_3| \cdot \left| z_1 - \frac{z_2 + z_3}{2} \right| = |(z_2 - z_3)(2z_1 - z_2 - z_3)| = \\ &= |z_2(z_1 - z_2) + z_3(z_2 - z_3) + z_1(z_3 - z_1)| \leq \\ &\leq |z_2||z_1 - z_2| + |z_3||z_2 - z_3| + |z_1||z_3 - z_1| = R(a + b + c) = 2Rp \Rightarrow am_a \\ &\leq Rp . \end{aligned}$$

Bibliografie:

- [1] PANAITOPOL L., BĂNDILĂ V. , LASCU M. *Inegalități*- Zalău,Editura Gil, 1996
- [2] BECHEANU M. , ENESCU B. *Inegalități elementare ... și mai puțin elementare*- Zalău, Editura Gil, 2002
- [3] DRÂMBE M. O. *Inegalități- idei și metode*- Zalău, Editura Gil, 2003
- [4] Colecția revistei **Gazeta Matematică**, seria B, 1970- 2021
- [5] POPESCU P. G., MAFTEI I. V., DIAZ- BARRERO J. L., DINCA M. *Inegalități matematice: modele inovatoare* – București, Editura Didactică și Pedagogică, 2007
- [6] CÎRTOAJE V. *Mathematical Inequalities, vol.1 Symmetric Polynomial Inequalities*- România, Editura University of Ploiesti, 2015

[7] **CÎRTOAJE V.** *Mathematical Inequalities, vol.2 Symmetric Rational and Nonrational Inequalities*- România, Editura University of Ploiesti, 2015

[8] **CÎRTOAJE V.** *Mathematical Inequalities, vol.3 Cyclic and Noncyclic Inequalities*- România, Editura University of Ploiesti, 2015

[9] **CÎRTOAJE V.** *Mathematical Inequalities, vol.4 Extensions and Refinements of Jensen`s Inequality*- România, Editura University of Ploiesti, 2015

[10] **CÎRTOAJE V.** *Mathematical Inequalities, vol.5 Other New Methods for Creating and Solving Inequalities*- România, Editura University of Ploiesti, 2015

CUPRINS

1. Prezența inegalităților în programele școlare.....	7
2. Inegalități demonstrate prin inducție.....	11
3. Inegalități geometrice.....	22
4. Inegalități exponențiale și logaritmice.....	38
5. Inegalități cu numere complexe.....	44
Bibliografie.....	56

© Mirela Pîrvu
Toate drepturile rezervate



Editura Cartea Vrânceană
ISBN 978-606-95212-2-9

2021